

TD 7 : Fonctions usuelles Indication

Fonctions puissances, exponentielle, etc.

1 ★★ Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^x$. Par une étude de fonction, montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner la valeur du minimum ainsi que le ou les points en lesquels il est atteint.

Passer par la forme exponentielle ! Le reste est trivial.

2 ★★ Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites des fonctions suivantes, aux points indiqués.

- 1) $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ en $+\infty$.
- 2) $x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$ en 0^+ .
- 3) $x \mapsto \ln|x| \times e^{\frac{1}{x}}$ en $-\infty$.
- 4) $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ en 0^+ .
- 5) $x \mapsto \frac{1}{x} \ln(1+e^x)$ en $+\infty$.
- 6) $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^3}\right) \times \ln x$ en 0^+ .

Il faudra parfois se ramener aux croissances comparées, parfois non. Une simple réécriture permet parfois de conclure.

3 ★★ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

- 1) $2e^{3x} - 5e^{2x} + 2e^x \leq 0$
- 2) $\ln(3-x) + \ln(2) - 2\ln(x+1) \geq 0$
- 3) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

Cet exercice nécessite des techniques de résolution déjà connues : changer d'inconnue, faire des réécritures, isoler x , etc.

4 ★★ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y &= 7 \\ \ln x + \ln y &= 10 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 8^x &= 10y \\ 2^x &= 5y \end{cases}$$

Pour le premier système, on peut commencer par remarquer que $\ln x + \ln y = \ln(xy)$. On peut ensuite se ramener à un type de système qu'on sait résoudre avec la bonne méthode...

Fonctions trigonométriques

5 ★★ Simplifier les expressions suivantes :

- 1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- 2) $\arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right)$
- 3) $\cos(2 \arccos x)$
- 4) $\cos(2 \arcsin x)$
- 5) $\tan(2 \arctan x)$
- 6) $\sin(2 \arctan x)$
- 7) $\cos^2(\arctan x)$
- 8) $\tan(\arcsin x)$

À l'exception des deux premiers calculs, il faut exploiter la bonne formule trigonométrique (pour $\cos$, $\sin$ et $\tan$). Par exemple pour $\sin(2 \arctan x)$, connaît-on une formule qui exprime $\sin(2\theta)$ en fonction de $\tan \theta$?

6 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Calculer $\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx)$. En déduire $\sum_{k=0}^n k \operatorname{sh}(kx)$

Ne pas oublier que $e^{kx} = (e^x)^k$!

7 ★★

- 1) Montrer que la fonction $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection. On notera argsh sa bijection réciproque.
- 2) Montrer que la fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée. Dresser le tableau de variations de la fonction argsh .
- 3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

0) Il faut suivre le même cheminement que celui vu en cours pour définir $\arcsin$, $\arccos$ ou $\arctan$.

8 ★★ On souhaite montrer de deux façons différentes l'identité :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

- 1) On pose $f : x \mapsto \arccos x + \arcsin x$. Dériver f et en déduire le résultat voulu.
- 2) (a) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $x = \sin y$.
(b) En déduire le résultat voulu.

Pour le 1), la résolution est clairement guidée, mais attention à la rigueur ! Le diable est dans les détails... Pour 2)b), on est bloqué avec un $\arccos(\sin y)$... Mais on peut par exemple réécrire $\sin y$ autrement, pour pouvoir appliquer une formule connue avec $\arccos$.

9 ★★ Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Obtenir une formule similaire pour $x \in \mathbb{R}_-^*$.

Pour montrer qu'une expression qui dépend de x est en fait constante, il est souvent profitable de considérer cette expression comme une fonction et la dériver.

10 ★★ Soit $a, b \in D_{\tan}$ tels que $a + b \in D_{\tan}$.

- 1) Rappeler la formule qui exprime $\tan(a + b)$ en fonction de $\tan a$ et de $\tan b$.
- 2) En déduire $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$.

0) La seule difficulté consiste à se rappeler des formules utiles.

11 ★★★

- 1) Peut-on trouver une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\operatorname{ch}(x)) = e^x$?
- 2) Peut-on trouver une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\operatorname{sh}(x)) = e^x$?

Noter que cela revient à avoir $f \circ \operatorname{ch} = \exp$... Toute propriété de l'application $\exp$ doit donc être partagée avec l'application $f \circ \operatorname{ch}$.
Idem pour $f \circ \operatorname{sh} = \exp$

12 ★★★ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- 1) $\arccos x = \arcsin(2x)$
- 2) $\arctan(2x) = \arcsin x$
- 3) $\arcsin(\tan x) = x$
- 4) $\arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$
- 5) $\arcsin(x + 1) - \arcsin x = \frac{\pi}{3}$

Cet exercice est avant toute chose un test de rigueur. Pour quels x est-ce que ces équations ont un sens ? Si on applique une fonction comme $\sin$ ou $\tan$ aux deux membres, a-t-on bien équivalence ? Si on n'a pas équivalence pour tous les x , alors on disjoint les cas pour progresser.
Avoir en tête les graphes de $\arccos$, $\arcsin$ et $\arctan$ est également crucial.